In the name of Allah, the Most Gracious, the Most Merciful

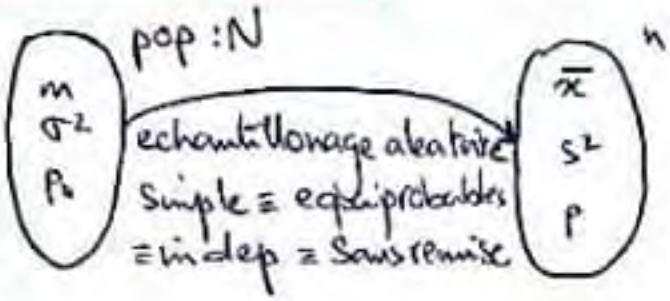
Copyright disclaimer

"La faculté" is a website that collects medical documents written by Algerian assistant professors, professors or any other health practicals and teachers from the same field.
Some articles are subject to the author's copyrights.
Our team does not own copyrights for some content we publish.
"La faculté" team tries to get a permission to publish any content; however , we are not able to contact all authors.
If you are the author or copyrights owner of any kind of content on our website, please contact us on: facadm16@gmail.com to settle the situation.
All users must know that "La faculté" team cannot be responsible anyway of any violation of the authors' copyrights.
Any lucrative use without permission of the copyrights' owner may expose the user to legal follow-up.

Free database on www.la-faculte.net published for NON-lucrative use

Estimation

I/ Introduction



- $(X_1, \dots, X_n)$, c'est un nech.
- $(x_1, \dots, x_n)$, sa réalisation.
- $T = f(X_1, \dots, X_n)$, une statistique.
- $t = f(x_1, \dots, x_n)$ sa réalisation.

$\bar{X}$	S^2
$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$S^2 = \frac{1}{n}\sum (X_i - \bar{X})^2$ $S^2 = \left(\frac{1}{n}\sum X_i^2\right) - \bar{X}^2$
$E(\bar{X}) = m$ $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$	$E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$
$\bar{X} \rightsquigarrow N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - m) \rightsquigarrow N(0,1)$ (loi exacte ou approximée)	$\frac{n}{\sigma^2} S^2 \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}$
$\frac{\sqrt{n-1}}{S}(\bar{X} - m) \rightsquigarrow St_{n-1}$	

Rq: tjr:
- $N < 30 \Rightarrow$ On suppose la normalité (loi exacte)
- $N > 30 \Rightarrow$ On utilise la T.C.L. (loi approximée)

II/ Estimation ponctuelle

- $T = f(X_1, \dots, X_n)$ est un estimateur du paramètre θ, et t sa réalisation.
- $B(T) = E(T - \theta) = E(T) - \theta$
- T ESB de $\theta \Leftrightarrow B(T) = 0 \Leftrightarrow E(T) = \theta$
- $EQM(T) = Var(T) + B^2(T)$

Meilleur estimateur $\Leftrightarrow$ EQM ↘

- $\hat{m}$ échantillons → meilleur → ESB
- 2 échantillons et les 2 estimateurs sont ESB → meilleur → Var ↘

$$\hat{m} = \bar{x}$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} S^2$$
$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, S$$
$$\hat{p} = p = p(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{k}{n}$$

III/ Estimation par $IC_\alpha(\theta)$

$[a,b] = IC_\alpha(\theta) \Leftrightarrow P(a < \theta < b) = 1 - \alpha$

- α : risque d'erreur, fixé ≤ 10%. (1%, 5%, 10%)
- $1-\alpha$: seuil de confiance, (taux de sécurité.

NAIDJI ADEL 2015/2016

Scanned by CamScanner
Contact us on: facadm16@gmail.com 2015/2016

Free database on www.la-faculte.net published for NON-lucrative use

$IC_\alpha(m)$

$IC_\alpha(m) = [\bar{x} \pm h]$; h c'est la precision.

Calcul de h:

	σ^2 connue	σ^2 inconnue
$n > 30$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}$ (1)	$\frac{S}{\sqrt{n-1}} q_{1-\alpha/2}$ (3)
$n < 30$ $X \rightsquigarrow N(m;\sigma^2)$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}$ (2)	$\frac{S}{n-1} t_{n-1}(\alpha)$ (4)

- $q_{1-\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$

Calcul de $\bar{x}$ et h à partir d'un I.C connu

$[a,b] = IC_\alpha(m) \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = \frac{b+a}{2} \\ h = \frac{b-a}{2} \end{cases}$

Taille de l'echantillon:

h soit donné ou on le calcule $h_0 = \frac{b-a}{2}$

- pour un h donné $= h_0$ → on trouve n (h c'est une fourchette de h)
- h d'au moins h_0 → $h \leq h_0$
- h au moins h_0 → $h \geq h_0$.
- Dans le 4ème cas, on peut pas trouver n.

$IC_\alpha(p_0)$

- Conditions de Validité:

$n > 30$, $np_0 \geq 5$, $nq_0 \geq 5$.

$IC_\alpha(p_0) = [p \pm h]$ tq: $h = q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

On peut déterminer:

- p et h à partir d'un $IC = [a,b]$ connu
- n après avoir calculer h

$IC_\alpha(\sigma^2)$

- m connue $\left[\frac{\sum(x_i-m)^2}{\chi^2_n(\alpha/2)}, \frac{\sum(x_i-m)^2}{\chi^2_n(1-\alpha/2)}\right]$

- m inconnue $\left[\frac{nS^2 = \sum(x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)}; \frac{nS^2 = \sum(x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\right]$

- Si $n-1 > 30$ $\chi^2_{n-1} \rightsquigarrow N(n-1; 2(n-1))$ et

$$\begin{cases} \cdot \chi^2_{n-1}(\alpha/2) = v + q_{1-\alpha/2}\sqrt{2v} \\ \cdot \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2) = v - q_{1-\alpha/2}\sqrt{2v} \end{cases}$$

tq: $v = n-1$

Rq:

$\alpha \nearrow \Rightarrow$ IC se réduit et n réduit.

Qlq valeurs de $q_{1-\alpha/2}$

α	1%	5%	10%
$q_{1-\alpha/2}$	2,58	1,96	1,64.

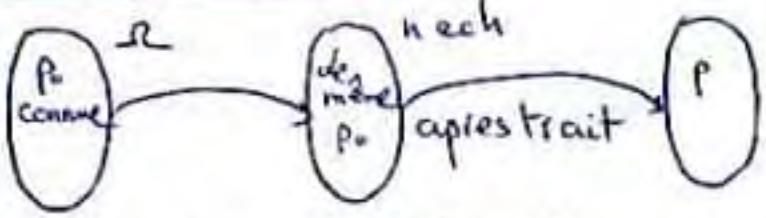
Scanned by CamScanner
Contact us on: facadm16@gmail.com 2015/2016

Free database on www.la-faculte.net published for NON-lucrative use

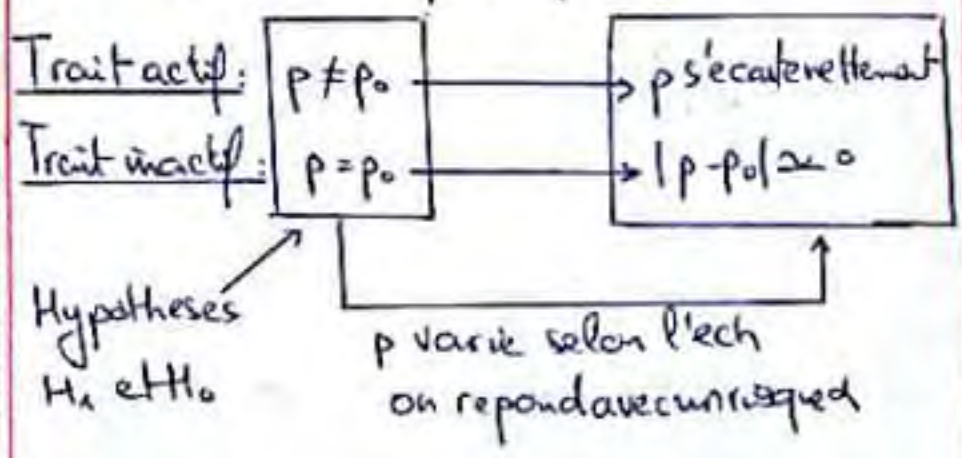
Tests d'Hypotheses

A/ Generalités sur les Tests

• Introduction:



On veut tester l'efficacité du traitement
⇒ On compare p et p_0



• Principe General des Tests

→ Definir H_0 et H_1 : (H_0 ⇒ l'egalité)

→ Calcul: Construire une stat T d'une loi connue + calculs.

→ Conclusion: Rejeter ou ne pas rejeter H_0 avec un risque α.

• Les parametres à connaitre:

→ erreur de type α : $\alpha = P$(rejeter H_0 / H_0 vraie)

→ erreur de type β : $\beta = P$(rejeter H_1 / H_1 vraie)

$\alpha + \beta \neq 1$ et α est plus grave

→ Puissance : $\Pi = 1 - \beta = P$(conclure H_1 / H_1 vraie)

→ La p-value: { - erreur max → ne pas rejeter H_0 ; - erreur min → rejeter H_0

$$\text{pvalue} = \begin{cases} 2F(t_0) & \text{si } F(t_0) \leq 0,5 \\ 2(1 - F(t_0)) & \text{si } F(t_0) \geq 0,5 \end{cases}$$

B/ Tests de Conformité

- (ech - pop)
  - ⇓ le parametre à etudier est connu
- H_0 : ech representatif de la pop.

Comparaison d'1 moy obs $\bar{x}$ et 1 moy theo connue m

Intervalle de Pari

- $I P_\alpha(m) = [m \pm h]$; h selon les ≠ cas.
- Si $\bar{x} \notin I P_\alpha(m)$ ⇒ H_0 rejetée au risque α.

l'ecart reduit ε:

- $\varepsilon = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - m| \rightsquigarrow N(0,1)$ si σ connue
- $\varepsilon = \frac{\sqrt{n-1}}{s} |\bar{x} - m|$ si σ inconnue.
  - $n \leq 30$: St_{n-1} (On suppose la normalité)
  - $n > 30$: $N(0,1)$
- $\varepsilon > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ou $t_{n-1}(\alpha)$ ⇒ H_0 rejetée au risque α.

NAIDJI ADEL 2015/2016

Scanned by CamScanner
Contact us on: facadm16@gmail.com 2015/2016

Free database on www.la-faculte.net published for NON-lucrative use

Comparaison d'1 prop obs p et 1 prop theo p_0 connue

Conditions de Validité : $n > 30$, $np_0 \geq 5$ et $nq_0 \geq 5$

IP (les 3 condit°)	E (les 3 condit°)	Conformité du χ^2 (Sans condition)
$IP_\alpha(p_0) = [p_0 \pm h]$ $h = q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$ $p \notin IP \Rightarrow H_0$ rejeté au risque α	$\varepsilon = \frac{\lvert p - p_0 \rvert}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \sim N(0,1)$ $\varepsilon > q_{1-\alpha/2} \Rightarrow H_0$ rejeté (α)	$\varepsilon^2 = \chi^2_{cal}$ (Voir après)

Comparaison de 2 dist obs et theo : Test de Conformité χ^2

$H_0 : p_{oi} = p_i$

Cas general : $C_i \geq 5$:

Classe	$O_i = np_i$	p_{oi}	$C_i = np_{oi}$	$\frac{(O_i - C_i)^2}{C_i}$
Il y a k classes	effectifs	propal°	effectifs	
Σ	n	1	n	χ^2_{cal}
	obs	theorique.		

$$\chi^2_{cal} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - C_i)^2}{C_i} \quad \forall i = \overline{1,k} \quad C_i \geq 5.$$

Si $\chi^2_{cal} > \chi^2_{\upsilon}(\alpha)$: H_0 rejeté (α)

$\boxed{\upsilon = k - 1}$

Cas où $\exists C_i \leq 5$ et $k > 2$

On regroupe [la classe avec C_i plus petit] avec [la plus petite classe adjacente] jusqu'à dépasser 5.

et $\boxed{\upsilon = k' - 1}$

Cas où $\exists C_i \leq 5$ et $k = 2$:

Correction de Yates

$$\chi^2_{cal} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\left(|O_i - C_i| - 1/2\right)^2}{C_i}$$

et $\upsilon = 1$.

Cas particulier $k = 2$:

$\chi^2_{cal} = \varepsilon^2$

Tests d'Adjustement

=

Test de conformité du χ^2.

- p_{oi} est donnée par une loi usuelle : $\upsilon = k - 1 - r$.

Scanned by CamScanner
Contact us on: facadm16@gmail.com 2015/2016

Free database on www.la-faculte.net published for NON-lucrative use

Lois	Calcul des poi	des classe	η = nbre de parametres inconnue estimés
Binomiale	$P_{oi} = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$	$i \in \{0, 1, \dots, n\}$	$\eta = \{0,1\}$ et $\hat{p} = \frac{\overline{x_i}}{n}$
Passam	$P_{oi} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ $\begin{cases} P(X=i+1) = \frac{\lambda}{i+1} P(X=i) \\ P(X=0) = e^{-\lambda} \end{cases}$	$i = \{0, 1, \dots, \infty\}$ $\mid i > k$	$\eta = \{0, 1\}$ et $\hat{\lambda} = \overline{x}$
Normale	La table de $N(0,1)$	On ajoute 2 classe $]-\infty, a_0[$ et $]a_k, +\infty[$	$\eta = \{0,1,2\}$ et $\hat{m} = \overline{x}$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} S^2$

C/ Tests d'homogeneité

$(ech_1 - ech_2)$ H_0: des 2 ech proviement de 2 pop identiques

Comparaison de 2 moy

$H_0 : m_1 \simeq m_2 \;/\; \overline{x_1} \simeq \overline{x_2}$

Recouvrement par IC

$I_1 = IC_\alpha(m_1)$ et $I_2 = IC_\alpha(m_2)$

- Si $I_1 \cap I_2 = \phi$: H_0 rejetée (α)
- Si $I_1 \cap I_2 \neq \phi$
  - $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2} \in I_1 \cap I_2 \rightarrow H_0$ non rejetée
  - $\overline{x_1}$ ou $\overline{x_2} \notin I_1 \cap I_2 \rightarrow$ On peut pas juger

L'ecart reduit ε

n_1 et $n_2 > 30$:

$$\varepsilon = \frac{|\overline{x_1} - \overline{x_2}|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

$\varepsilon > q_{1-\alpha/2} \Rightarrow H_0$ rejetée.

n_1 ou $n_2 \leq 30$:

$$\varepsilon = \frac{|\overline{x_1} - \overline{x_2}|}{\sqrt{\frac{S^2}{n_1} + \frac{S^2}{n_2}}} \rightsquigarrow St_{n_1+n_2-2}$$

$$S^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$\varepsilon > t_{n_1+n_2-2} \Rightarrow H_0$ rejetée (α)

- Si $n_1 + n_2 - 2 > 30 \Rightarrow$ On approxime par N

NAIDJI ADEL 2015/2016

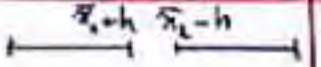
Comparaison de 2 prop

IC	ε	χ^2
kif kif	$\varepsilon = \frac{\lvert p_1 - p_2 \rvert}{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$; $p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$ (5) / $\varepsilon \rightsquigarrow N(0,1)$; $\varepsilon > q_{1-\alpha/2} \Rightarrow H_0$ rejetée	$\varepsilon^2 = \chi^2_{cal}$ (voir apres

Scanned by CamScanner
Contact us on: facadm16@gmail.com 2015/2016

Free database on www.la-faculte.net published for NON-lucrative use

Taille minimale pour H_0 rejetée.

IC $I_1 \cap I_2 = \Phi$	ε.
On suppose $n_1 = n_2 = n$.  $\bar{x}_1 + h < \bar{x}_2 - h$ / h est une fonct° de n n >	$\varepsilon > q_{1-\alpha/2}$; ε est une fonct° de n. n > ...

D/ Test d'independance du χ^2

(de lien entre 2 cavacters qualitatifs)

H_0 : "Il y a "independance.

Cas general $C_{ij} \geq 5$:

ex : "Influence du Tabac T sur le cancer C

i \ j	C	$\bar{C}$	Σ
T	$O_{11}=40$ / C_{11}	$O_{12}=30$ / C_{12}	70
$\bar{T}$	$O_{21}=20$ / C_{21}	$O_{22}=10$ / C_{22}	30
Σ	66	40	$\sum$ 100

- O_{ij} : effectifs observés
- C_{ij} : effectifs theoriques $= \frac{\Sigma \times \Sigma}{\Sigma}$

$$\begin{cases} C_{11} = \frac{60 \times 70}{30} \\ C_{21} = \frac{60 \times 30}{100} \text{ ....} \end{cases}$$

ici, on a 4 classes, chacune a un O_{ij} et C_{ij}

n_i	O_{ij}	C_{ij} (calculés)	$(O_{ij}-C_{ij})^2/C_{ij}$
Σ	n	n	χ^2_{cal}

$$\chi^2_{cal} = \sum_i \sum_j \frac{(O_{ij} - C_{ij})^2}{C_{ij}}$$

si $\chi^2_{cal} > \chi^2_{\upsilon}(\alpha) \Rightarrow H_0$ rejetée (α)

$$\upsilon = (k-1)(l-1)$$

1. Cas où $\exists C_{ij} < 5$ et $k > 2$:

regroupement de classes $\upsilon = (k'-1)(l'-1)$

- Cas où $\forall C_{ij} < 5$ et $(k,l) = (2,2)$:

$$\chi^2_{Yates} = \sum_1^2 \sum_1^2 \frac{(|O_{ij} - C_{ij}| - 1/2)^2}{C_{ij}}$$

- Cas particulier $(k,l) = (2,2)$:

2 methode

$$\chi^2_{cal} = \varepsilon^2$$

Test du χ^2 — Comparaison de p_1 et p_2

$$p_1 = P(C/F) = \frac{|C \cap F|}{|F|} = \frac{40}{70}$$

$$p_2 = P(C/\bar{F}) = \frac{|C \cap \bar{F}|}{|\bar{F}|} = \frac{20}{30}.$$

NAIDJI ADEL 2015/2016

Scanned by CamScanner
Contact us on: facadm16@gmail.com 2015/2016

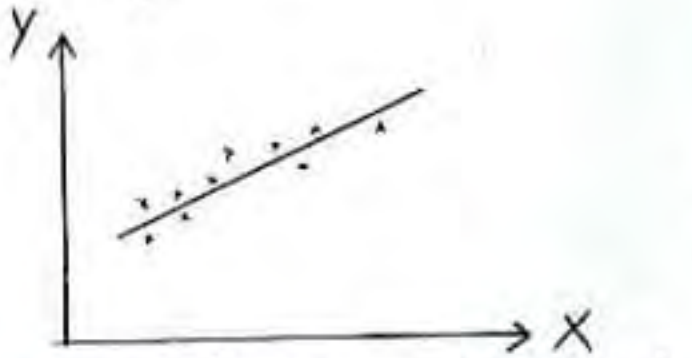
Free database on www.la-faculte.net published for NON-lucrative use

E/ Tests de Corrélation

→ Introduction:

- Le But est d'étudier l'existence d'un lien entre 2 caracteres quantitatifs X et Y
- si ce lien existe, la relation entre X et Y sera considérée linéaire

$$Y = aX + b.$$



nuage de pts (Diagramme de Dispersion)

- Pour trouver (a, b), on doit faire des calculs

→ Parametres à Calculer:

+ La Covariance: $S_{xy} \in \mathbb{R}$

$$S_{xy} = \frac{1}{n}\sum x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$

• Coefficient de Corrélation:

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

$$|r_{xy}| \leq 1$$

- $|r_{xy}| = 1$: Dans la pratique $r_{xy}^2 \geq \frac{3}{4}$ ⇒ X et Y non indep.
- $r_{xy} = 0$: X et Y indep
- Sinon : On peut pas juger ⇓ Tests. (3)

+ Tests de Corrélation:

H_0: Il y a indépendance

conformité (1 ech)	homogeneité (2 ech)
$H_0: r_{xy} \simeq 0$	$H_0: r_1 \simeq r_2$
$\varepsilon = \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \lvert r \rvert \sim St_{n-2}$ $\varepsilon \geq t_{n-2} \Rightarrow H_0$ rejeté (α)	$\varepsilon = \frac{\lvert r_1 - r_2 \rvert}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}}$

• Droites de Regression:

Grâce aux parametres déjà calculés, on peut designer a, b, α, β.

• $D_{y(x)}$: $\hat{y} = \hat{a}x + \hat{b}$

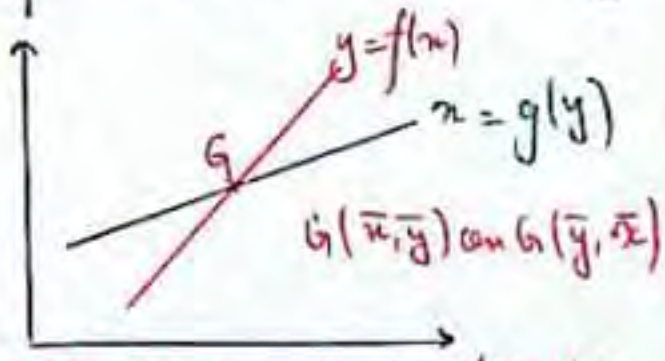
$$\begin{cases} \hat{a} = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \\ \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} \end{cases}$$

utilité: predire y_0 d'une valeur obs x_0

• $D_{x(y)}$: $\hat{x} = \hat{\alpha}y + \hat{\beta}$

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \frac{S_{xy}}{S_y^2} \\ \hat{\beta} = \bar{x} - \hat{\alpha}\bar{y} \end{cases}$$

utilité : predire x_0 d'une valeur obs y_0.



NAIAJI ADEL 2015/2016

Scanned by CamScanner
Contact us on: facadm16@gmail.com 2015/2016